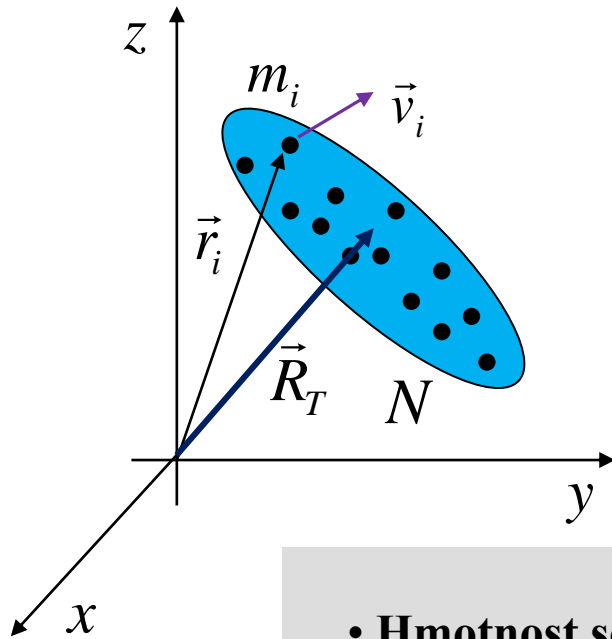


# Soustava hmotných bodů - popis



- Soustava  $N$  částic,  
např. molekuly plynu v uzavřené nádobě
- Poloha  $i$ -tého bodu:  $\vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z$
- Rychlost, hybnost  $i$ -tého bodu:  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ ,  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$
- Zrychlení  $i$ -tého bodu:  $\vec{a}_i = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$

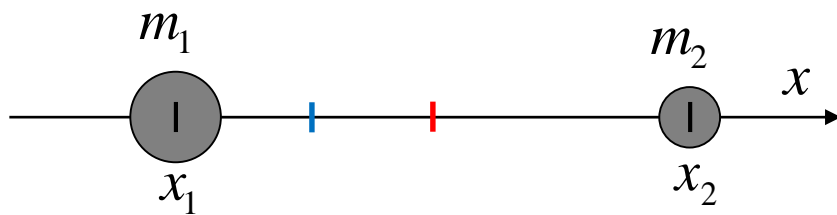
- **Hmotnost soustavy hmotných bodů:**  $M = \sum_{i=1}^N m_i$
- **Hmotný střed (těžiště):**  $\vec{R}_T \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

$$X_T \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad Z_T \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$

# Soustava hmotných bodů - hmotný střed

• hmotný střed  $\vec{R}_T = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

$$X_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad X_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

## • Země-Měsíc:

$$m_1 = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$m_2 = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg} = 0.0123 m_1$$

střední vzdálenost Země – Měsíc:

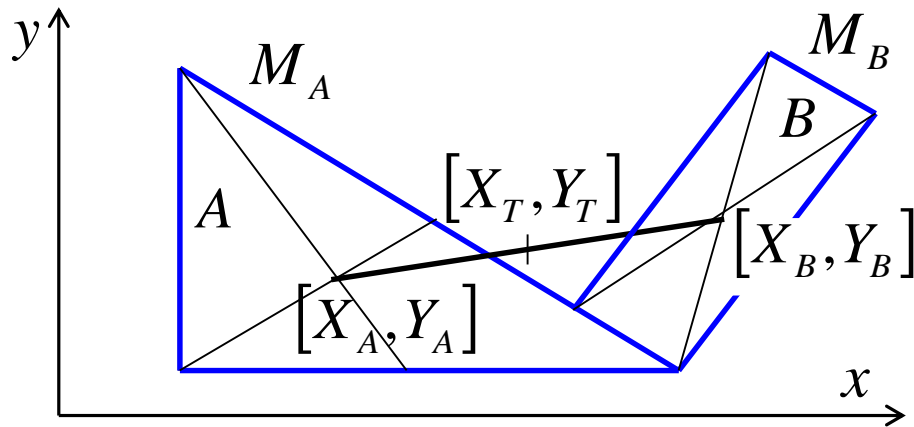
$$x_2 = 394 \times 10^3 \text{ km (vzdálenost středů)}$$

$$X_T = (0 + 0.0123 \times 394 \times 10^3) / 1.0123 = 4880 \text{ km}$$

**$X_T$  je ~1500 km pod povrchem Země**

# Soustava hmotných bodů - hmotný střed

• hmotný střed  $\vec{R}_T = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$



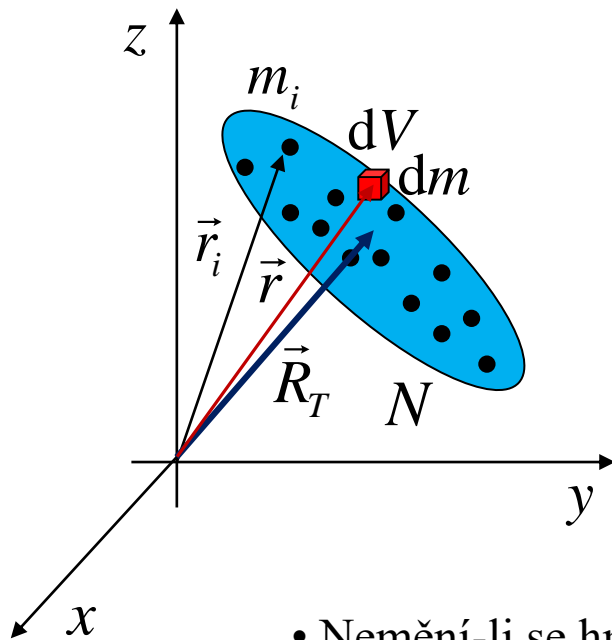
$$X_A = \frac{1}{M_A} \sum_A m_i x_i, \quad Y_A = \frac{1}{M_A} \sum_A m_i y_i$$

$$X_B = \frac{1}{M_B} \sum_B m_i x_i, \quad Y_B = \frac{1}{M_B} \sum_B m_i y_i$$

$$MX_T = \sum_{A+B} m_i x_i = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B \Rightarrow X_T = \frac{M_A X_A + M_B X_B}{M}$$

$$MY_T = \sum_{A+B} m_i y_i = \sum_A m_i y_i + \sum_B m_i y_i = M_A Y_A + M_B Y_B \Rightarrow Y_T = \frac{M_A Y_A + M_B Y_B}{M}$$

# Soustava hmotných bodů - popis



- Volná soustava hmotných bodů. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné  $3N$  souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má  **$3N$  stupňů volnosti**.
- Tuhá soustava hmotných bodů. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

$$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \text{konst.}, \quad \rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$$

$$X_T \equiv \frac{1}{M} \int_V x \rho dV, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M} \int_V y \rho dV, \quad Z_T = \frac{1}{M} \int_V z \rho dV$$

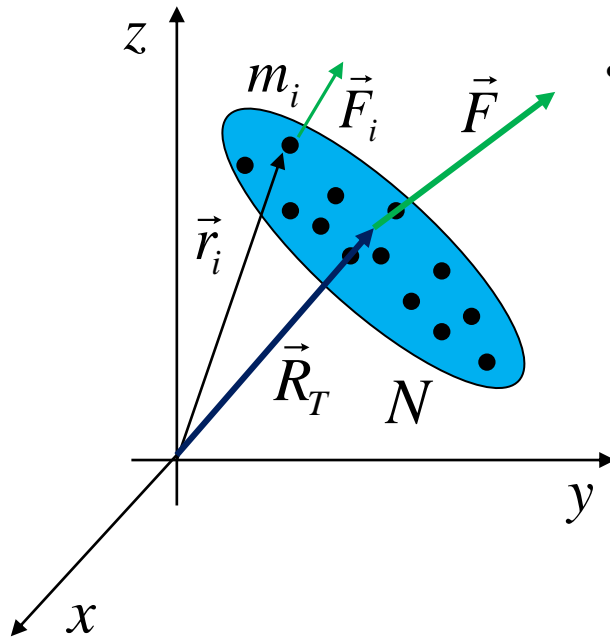
- Nemění-li se hmotnosti jednotlivých hmotných bodů s časem, potom **rychlost hmotného středu soustavy**:

$$\vec{v}_T = \frac{d\vec{R}_T}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i) \right] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \left( m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

- Pro celkovou hybnost soustavy hmotných bodů:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = M \vec{v}_T$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Síla působící na  $i$ -tý hmotný bod :  $\vec{F}_i$
- Sílu která nám působí na  $i$ -tý hmotný bod si můžeme představit složenou ze dvou výslednic:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I$$

výslednice **vnějších sil** působících na  $i$ -tý bod

**vnitřní síly**, kterými působí všechny hmotné body soustavy na  $i$ -tý bod

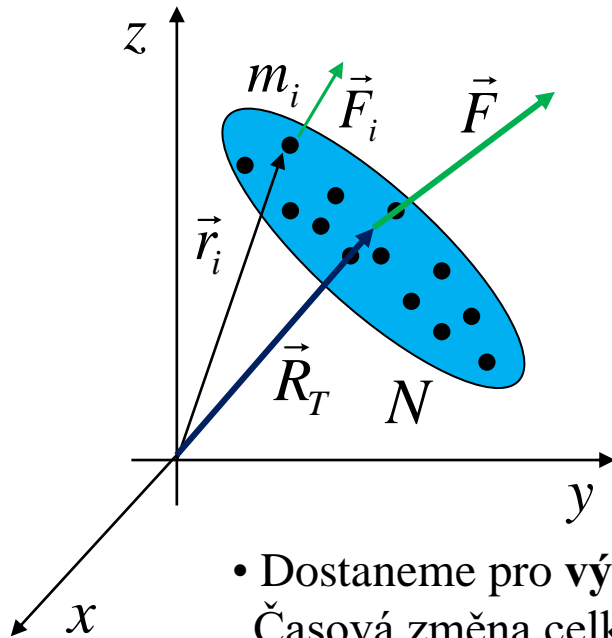
- Pro výslednici vnitřních sil platí:

$$\vec{F}_i^I = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^I, \quad \vec{F}_{ii}^I = 0$$

- Podle 2. Newtonova zákona je **výsledná síla** působící na soustavu:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \vec{F}_i^E + \sum_i^N \sum_j^N \vec{F}_{ij}^I = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Podle 3. Newtonova zákona platí:

$$\vec{F}_{ij}^I = -\vec{F}_{ji}^I \Rightarrow \sum_i^N \sum_j^N \vec{F}_{ij}^i = 0$$

- Uvážíme-li:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

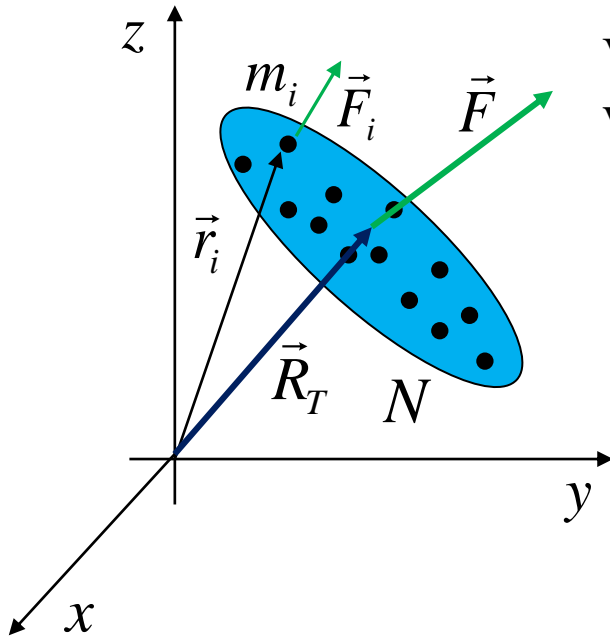
- Dostaneme pro výslednou sílu působící na soustavu tzv. **1. větu impulzovou**: „Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná výslednici vnějších sil působících na soustavu a má s ní stejný směr.“

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d^2 \vec{R}_T}{dt^2}$$

- Pro konečný časový interval  $(t_1, t_2)$  dostaneme integraci:

$$\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



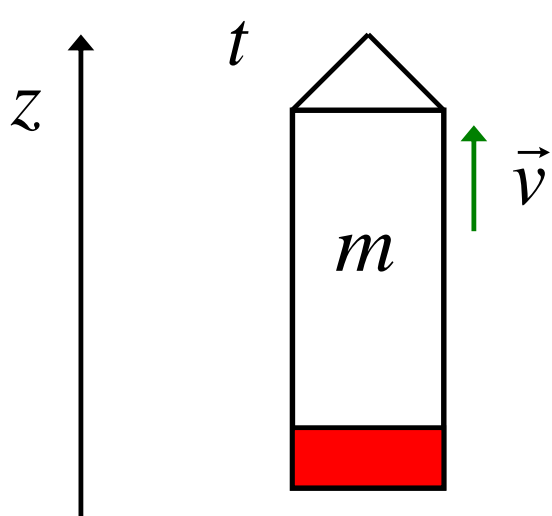
V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_T = \textit{konst.}$$

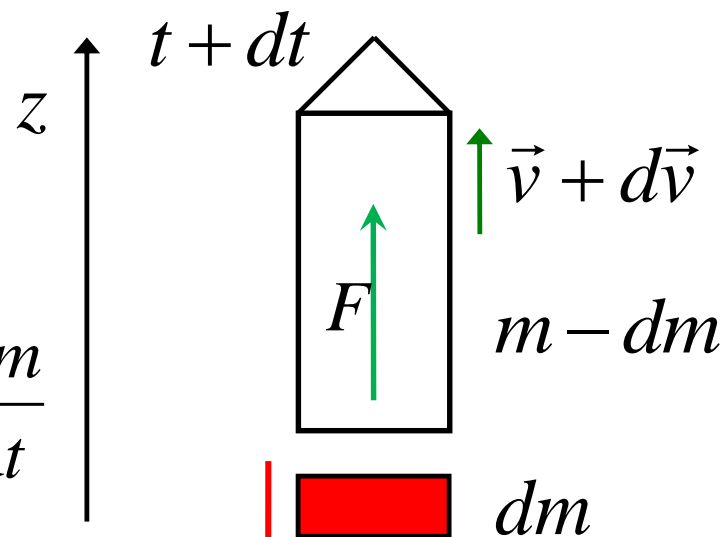
- **Zákon zachování hybnosti:**

„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

# Pohyb rakety



$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_r \frac{dm}{dt}$$



$$\vec{v}_p - \vec{v} = \vec{v}_r$$

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

zanedbáme

$$0 = m d\vec{v} + dm d\vec{v} + \vec{v}_r dm$$

$$dv = -v_r \frac{dm}{m}$$

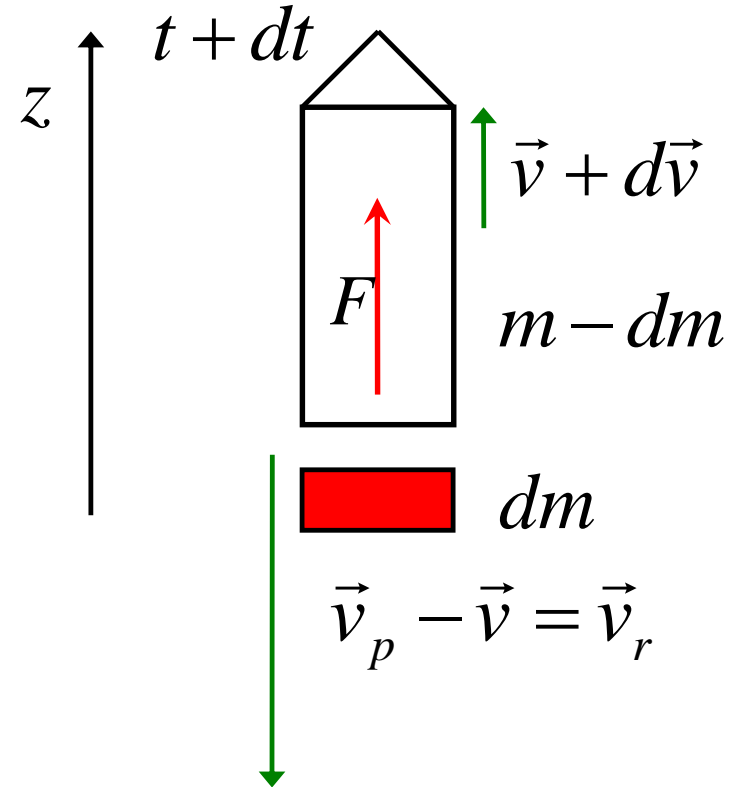
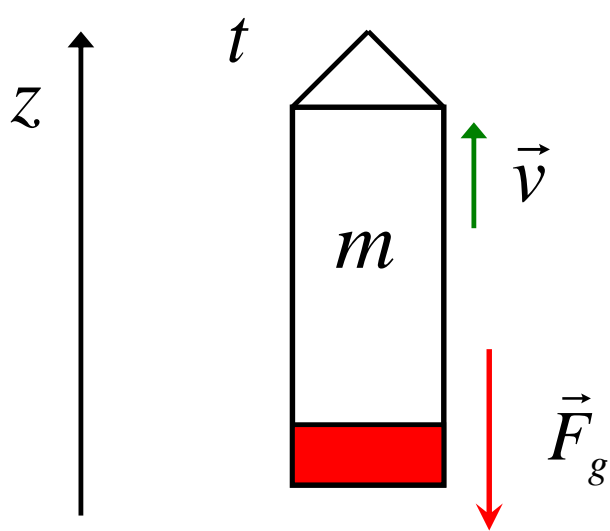
$$m(0) = m_0, \quad v(0) = 0$$

$$\vec{P} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{v}_p$$

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)} \quad \text{Ciolkovského rovnice}$$



# Pohyb rakety v tíhovém poli



$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}_r \frac{dm}{dt} + \vec{F}_g$$

$$dv + g = -v_r \frac{dm}{m}$$

$$m(0) = m_0, \quad v(0) = 0$$

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)} - g\tau$$

# Pohyb rakety

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)} \quad \text{Ciolkovského rovnice}$$

Příklad: **jednostupňová raketa**,  
bez gravitace

$$v_r = 4.5 \text{ km s}^{-1}$$

$$v(\tau) = 9.7 \text{ km s}^{-1}$$

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 1 - \exp\left(-\frac{v(\tau)}{v_r}\right)$$

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 88.4 \%$$

11.6 % zbývá pro náklad rakety

$$v(\tau) = v_r \ln \frac{m_0}{m(\tau)} - g \tau$$

Příklad: **jednostupňová raketa**,  
start z povrchu Země

$$v_r = 4.5 \text{ km s}^{-1} \quad \tau = 2 \text{ min}$$

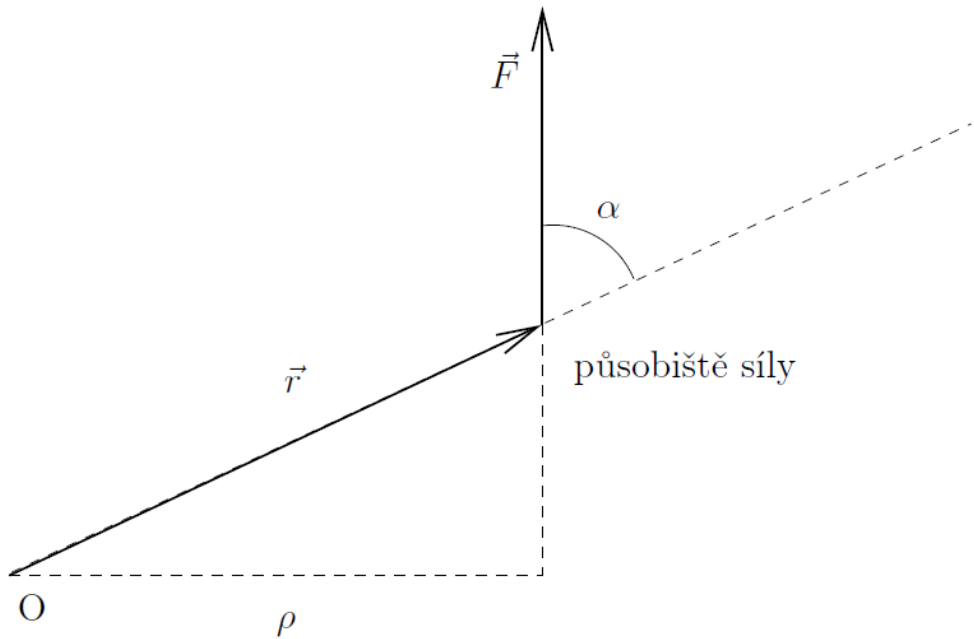
$$v(\tau) = 9.7 - 1.2 = 8.5 \text{ km s}^{-1}$$

Pokud bych chtěl dosáhnout rychlosti  $9.7 \text{ km s}^{-1}$   
musím mít palivo jako na dosažení rychlosti  
 $v(\tau) = 9.7 + 1.2 = 10.9 \text{ km s}^{-1}$  bez gravitace

$$\frac{m_0 - m(\tau)}{m_0} = 91.1 \%$$

8.9 % zbývá pro náklad rakety

# Opakování - moment síly, moment hybnosti



Pro studium kruhového pohybu hmotného bodu (hmotného středu tělesa) zavádíme pojem momentu síly a momentu hybnosti vzhledem k bodu O.

**Moment síly:**

$$\vec{M} \equiv [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Jeho velikost je rovna:  $M = rF \sin \alpha = F\rho$

**Moment hybnosti:**

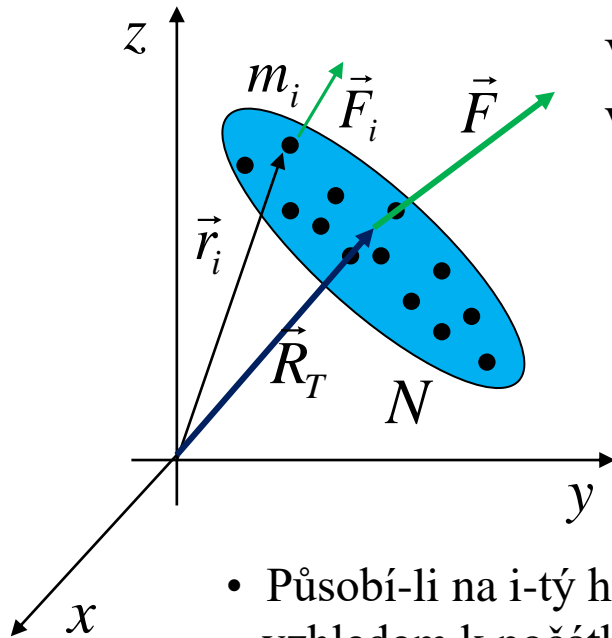
$$\vec{b} \equiv [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Druhý Newtonův zákon vynásobíme zleva vektorově polohovým vektorem:

$$\left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = \left[ \vec{r} \times \vec{F} \right] = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = m \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{v}] = m \left( [\vec{v} \times \vec{v}] + \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right] \right) = \left[ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_T = \text{konst.}$$

• **Zákon zachování hybnosti:**

„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

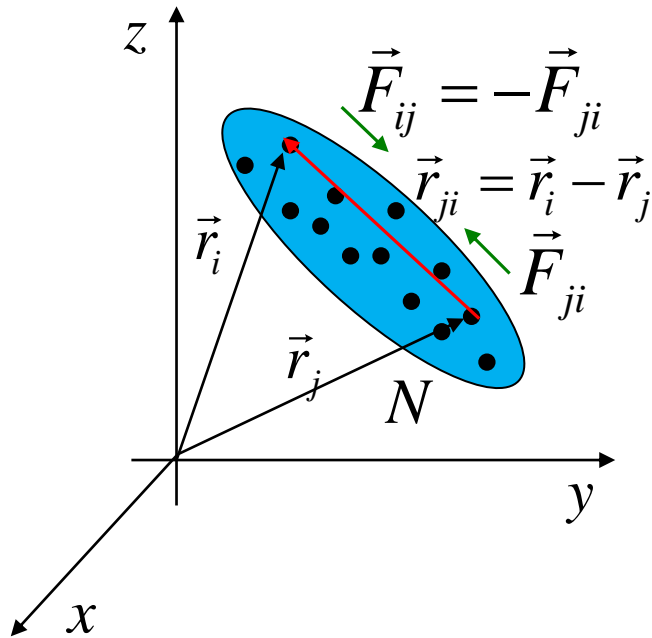
- Působí-li na  $i$ -tý hmotný bod síla  $\vec{F}_i$  pak moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadné je:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

- Pro celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E)] = \vec{M}^I + \vec{M}^E$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro moment vnitřních sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M}^I = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right]$$

- Uděláme trik:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left( \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] + \left[ \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \right)$$

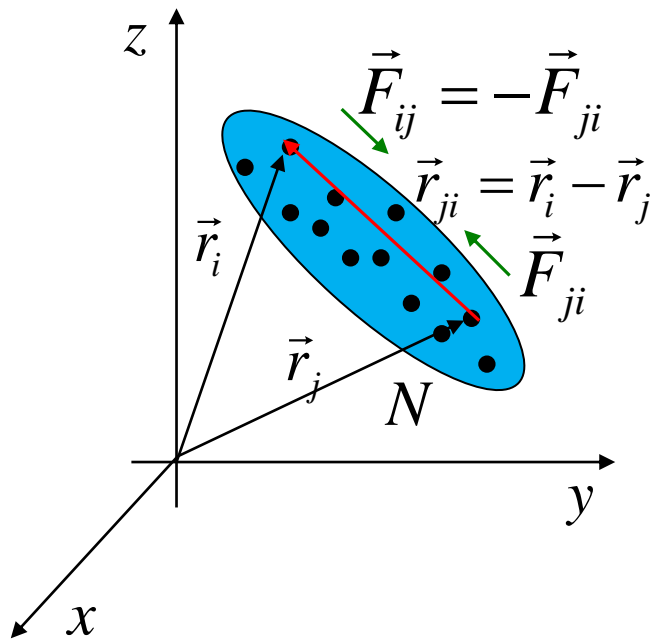
- A pro moment vnitřních sil dostaneme:

$$\vec{M}^I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \right] = 0, \quad \text{protože } \vec{r}_{ji} \parallel \vec{F}_{ij}$$

- Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je tedy roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\vec{M} = \vec{M}^E = \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E \right]$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro  $i$ -tý hmotný bod tedy platí:

$$\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

- Pro celou soustavu počítáme přes všechny hmotné body:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{b}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{b}_i = \frac{d\vec{B}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \vec{M}$$

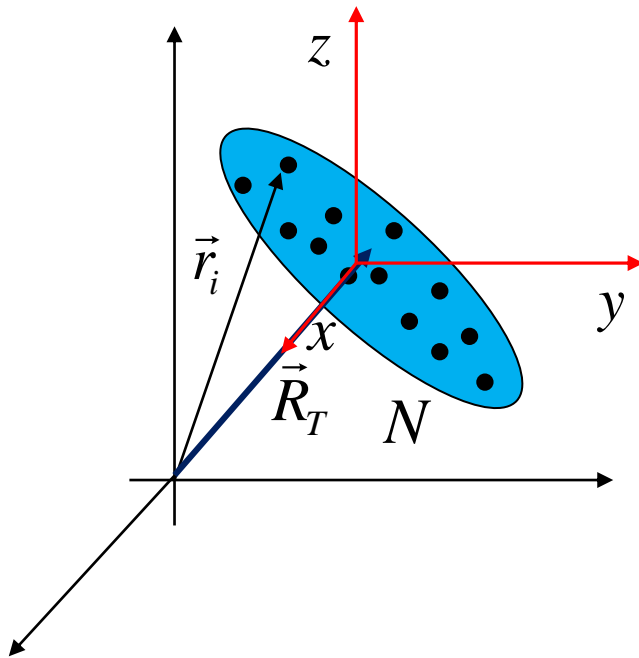
- Dostaneme **2. větu impulzovou**:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}$$

„Součet momentů vnějších sil působících na jednotlivé hmotné body soustavy je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.“

- Integrací můžeme upravit na tvar: 
$$\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

# Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Když za počátek soustavy souřadné zvolíme hmotný střed (těžiště) soustavy:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = 0$$

- dá se ukázat, že 2. věta impulzová platí i pokud vztahujeme moment hybnosti a moment síly vůči hmotnému středu soustavy:

$$\frac{d\vec{B}_s}{dt} = \vec{M}_s$$